Unidad IV

Derivadas

4.1 Conceptos de incremento y de razón de cambio. La derivada de una función.

Derivada de una función en un punto. Dada la función f(x) continúa en el intervalo abierto I, se define la derivada en el punto “a” como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Sí en lugar de considerar h el incremento de la variable independiente x lo sustituimos por Δx tenemos que la definición queda:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

En el caso de que hagamos h=x-a tenemos a+h=x, y la definición nos queda de la siguiente forma:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Función derivada. Dada la función f(x) continúa en el intervalo abierto I denominamos función derivada a:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Sí en lugar de considerar h el incremento de la variable independiente x lo sustituimos por Δx tenemos que la definición queda:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

4.2 La interpretación geométrica de la derivada.

La **derivada** de una función en un punto representa el valor de la pendiente de la recta tangente en dicho punto. La pendiente está dada por la tangente del ángulo que forma la recta tangente a la curva (función) con el eje de las abcisas, en ese punto.

La derivada de una función mide el coeficiente de variación de dicha función. Es decir, provee una formulación matemática de la noción del coeficiente de cambio. El coeficiente de cambio indica lo rápido que crece (o decrece) una función en un punto (razón de cambio promedio) respecto del eje x de un plano cartesiano de dos dimensiones. Por ejemplo si tomamos la velocidad de algo, su coeficiente es la aceleración, la cual mide cuánto cambia la velocidad en un tiempo dado.

4.3 Concepto de diferencial. Interpretación geométrica de las diferenciales.

La forma en que hemos abordado el concepto de derivada, aunque existen varios conceptos, fue el encontrar la relación de la pendiente de la línea recta y´ =f ´(x) que era tangente a la función. Para un punto en particular podemos llegar a la definición de la derivada f ‘(x) y vimos que f ‘(x1) es la pendiente de la recta tangente a la curva en x=x1.

El diferencial se puede tomar en el sentido geométrico como la elevación de la tangente desde el punto en que se toma el diferencial.

Recuérdese que la derivada de la función en el punto es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto, como sabemos que la tangente de un ángulo es igual al cociente entre el cateto opuesto (incremento de y) y el cateto contiguo (incremento de x) de un hipotético triángulo rectángulo, sólo hay que despejar el incremento de y que equivale a nuestro diferencial.

Vista geométricamente, la elevación se produce verticalmente a partir del punto en que se toma el diferencial. El incremento Δx que se tome representará el alejamiento horizontal que haga desde el punto en cuestión.

Así la elevación de la tangente que se obtenga como resultado dependerá del punto en cuestión y del alejamiento horizontal que se tomen, que en la formulas matemáticas están definidos respectivamente por x y Δx.

4.4 Propiedades de la derivada.

Sea $\vec{F}: A \to R^m$, con $A \subset R^n$, $(n \geq 2, m \geq 2)$
/ $\vec{F}(\vec{X}) = (F_1(\vec{X}); F_2(\vec{X}); \ldots; F_m(\vec{X}))$
.

1) Con una demostración similar a la realizada para funciones vectoriales se tiene que:

$$\vec{F}'(\vec{X}, \vec{v}) = (F_1'(\vec{X}, \vec{v}); F_2'(\vec{X}, \vec{v}); \ldots F_m'(\vec{X}, \vec{v}))$$

2) Si las F'i (con i "{1,2,...,m} son continuas en $\vec{X}_0$
, para cada componente vale la homogeneidad y la aditividad de la derivada direccional para campos escalares, entonces:

a) $\vec{F}'(\vec{X}_0, \lambda\vec{v}) = (F_1'(\vec{X}_0, \lambda\vec{v}); F_2'(\vec{X}_0, \lambda\vec{v}); \ldots; F_m'(\vec{X}_0, \lambda\vec{v})) =$

$$= \left(\lambda F_1'(\vec{X}_0, \vec{v}); \lambda F_2'(\vec{X}_0, \vec{v}); \ldots \lambda F_m'(\vec{X}_0, \vec{v})\right) =$$

$$= \lambda.\left(F_1'(\vec{X}_0, \vec{v}); F_2'(\vec{X}_0, \vec{v}); \ldots; F_m'(\vec{X}_0, \vec{v})\right) = \lambda.\vec{F}'(\vec{X}_0; \vec{v})$$

b)Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$
son versores de Rn y $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
, entonces:

$$\vec{F}'(\vec{X}_0; \vec{w}) = \vec{F}'(\vec{X}_0; \vec{u}) + \vec{F}'(\vec{X}_0; \vec{v})$$

4.5 Regla de la cadena.

Esta propiedad asegura que si *y = f(x)* es una función derivable en un cierto intervalo I,

$$f: I \longrightarrow \mathbf{R},$$

y *z = g(y)* es otra función derivable y definida en otro intervalo que contiene a todos los valores (imágenes) de la función *f,*

$$g: f(I) \longrightarrow \mathbf{R},$$

entonces la función compuesta

$$g \circ f: I \longrightarrow f(I) \longrightarrow \mathbf{R},$$

definida por (*g* o *f*) (x) = *g*[*f*(*x*)], es derivable en todo punto *x* de *I* y se obtiene

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Regla de la cadena para la función potencial

Se sabe que la derivada de una función $f(x) = x^m$ es $f'(x) = m \cdot x^{m-1}$.
Si en lugar de *x* se tuviese una función *u(x)*, la derivada de $u(x)^m$

$$(ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

aplicando la regla de la cadena, será:

$$[u(x)^m]' = m \cdot u(x)^{m-1} \cdot u'(x)$$

Para simplificar la notación, y a partir de ahora, se escribirá simplemente *u* en lugar de *u(x)*.

Así,

$$(ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

4.6 Fórmulas de derivación y fórmulas de diferenciación.

Formulas de Derivación
I dc = 0
La derivada de una constante es cero
II dx = 1
La derivada de una variable con respecto a si misma es la unidad.
III d (u + v – w) = du + dv - dw
La derivada de la suma algebraica de un numero finito n de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones
IV d (cv) =c. dv
La derivada del producto de una constante por una funcion es igual al producto de la constante por la derivada de la funcion
V d (uv) = u dv + v du

La derivada de un producto de dos funciones es igual al producto de la primera funcion por la derivada de la segunda, mas el producto de la segunda por la derivada de la primera.
VI d (un) = nun-1 du

La derivada de la potencia de una funcion de exponente constante es igual al producto del exponente por la funcion elevada a un exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la funcion.
VIa d (xn) = nxn - 1
Cuando v = x se convierte en la expresion anterior
VII d (uv) = v.du - u.dv.
v2 La derivada de un cociente de funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador
VIIa d (u/c) = du/ c
La derivada del cociente de una funcion dividida por una constante es igual a la derivada de la funcion dividida por la constante

$1.-d(c)=0$

$2.-d(x)=1$

$3.-d(u \quad v \quad w)=du \quad dv \quad dw$

$4.-d(uv)=udv+vdu$

$5.-d \quad \frac{u}{v} \quad = \frac{vdu-udv}{v^2}$

$6.-d \quad \frac{c}{v} \quad = \frac{cdv}{v^2}$

$7.-d \quad \frac{u}{c} \quad = \frac{du}{c}$

$8.-d(x^n)=nx^{n-1}$

$9.-d(u^n)=nu^{n-1}du$

$10.-d(senu)=\cos udu$

$11.-d(\cos u)=-senudu$

$12.-d(\tan u)=\sec^2 udu$

$13.-d(\cot u)=-\csc^2 udu$

$14.-d(\sec u)=\sec u \tan udu$

$15.-d(\csc u)-\csc u \cot udu$

$16.-d(arc\,\mathrm{se}\,nu)=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

$17.-d(\arccos u)=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

$18.-d(\arctan u)=\frac{du}{1+u^2}$

$19.-d(arc\cot u)=-\frac{du}{1+u^2}$

$20.-d(arc\sec u)=\frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$

$21.-d(arc\csc u)=-\frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$

$22.-d(\log_a u)=\frac{1}{u}\log_a edu$

$23.-d(\ln u)=\frac{du}{u}$

$24.-d(a^u)=a^u \ln adu$

$25.-d(e^u)=e^u du$

$26.-d(u^v)=vu^{v-1}du+u^v \ln udv$

4.7 Derivadas de orden superior y regla L´Hôpital.

La derivada de cualquier función determina la tasa de variación en función de la función con respecto a la entrada de la función. Este proceso de encontrar la derivada de una función se puede aplicar en una cascada muchas veces para encontrar las derivadas de orden superior de la función. Por ejemplo, al diferenciar la derivada de primer orden de la función, uno obtendrá la derivada de segundo orden de la función y a través de la diferenciación de la derivada de segundo orden de la función obtendremos la derivada de tercer orden de la función y así sucesivamente. En términos simples diferenciar la derivada de una función dará lugar a una derivada de la función de orden superior por un grado. La derivada de primer orden de la función se representa como,

$$f'(x)$$

La derivada de segundo orden de una función se representa como,

$$f''(x)$$

La derivada de tercer orden de una función se representa como,

$$f'''(x)$$

Y así sucesivamente. La derivada de segundo orden de la función también se conoce como “g doble prima de y”, donde g es la función en términos de y. De manera similar la derivada de tercer orden de una función también se conoce como “g triple prima de y”, etc. Las derivadas de orden superior de cualquier función pueden derivarse de esta forma hasta que la derivada obtenida es diferenciable en sí misma.

La derivada de segundo orden de una función f(x), que es todavía más diferenciable,

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d^2f(x)}{d^2x}$$

No es posible obtener una derivada de orden superior de la función si la derivada actual de la función no es diferenciable. Para aclarar el concepto de las derivadas de orden superior eche un vistazo al ejemplo citado a continuación. f(x) = 4×3 + 9×2 – 3x + 4 La derivada de primer orden de esta función será,

f’(x) = 12×2 +18x – 3

Por la derivada anterior ser diferenciable es posible al diferenciarla nuevamente obtener la derivada de segundo orden de la función como, f’’(x) = f’(f’(x)) = 24x + 18

Al analizar la derivada de la función anterior se puede ver que esta puede ser aún más diferenciada. Por lo tanto la derivada de tercer orden de la función será,

f’’’(x) = f‘(f’(f’(x))) = 24

Ahora la derivada de cuarto orden de la función se obtiene,

f’’’(x) = f’(f‘(f’(f’(x)))) = 0

Como se puede observar ya no es posible diferenciar la función por más tiempo, por lo tanto detenemos el proceso de diferenciación aquí.

El ejemplo anterior también arroja luz sobre un hecho muy interesante, que es, si f(x) es un polinomio con n como el más alto grado entonces la derivada de mayor orden de tal función será n +1. Una diferencia muy interesante y diminuta entre la notación convencional de la potenciación y la diferenciación se explica más adelante,

f(2)(x)= f’’(x) f2(x) = [f(x)]2

Esta es, la presencia de paréntesis en el exponente denota una operación de diferenciación, mientras que su presencia en sí denota la operación de exponenciación.

La regla de L’Hôspital, también llamada regla de Bernoulli es una parte muy importante del cálculo. Se utiliza principalmente para encontrar las salidas de los límites cuando los límites son de forma intermedia; se utiliza principalmente para las derivadas de las funciones.

Esta regla se utiliza para transformar los límites intermedios en una forma determinada y por tanto, obtener la salida más conveniente.

La definición formal de L’Hôspital es, existen dos funciones f(x) y g(x). Ahora bien, si $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$

, además

$\lim_{x\to c} f'(x)/g'(x)$ es real, entonces de acuerdo a la regla del L'Hôspital,

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4.8 Derivada de funciones implícitas.

Para hallar la derivada en forma implícita no **es necesario despejar y**.
Basta **derivar miembro a miembro**, utilizando las reglas vistas hasta ahora y teniendo presente que:

x'=1.

En general y'≠1.

Por lo que omitiremos x' y dejaremos y'.

$$6x-2y=0$$

$$6-2y'=0 \qquad y'=3$$

$$x^2+y^2-7=0$$

$$2x+2yy'=0 \qquad y'=-\frac{x}{y}$$

Cuando las funciones son más complejas vamos a utilizar una regla para facilitar el cálculo:

$$y'=\frac{-F'_x}{F'_y}$$

$$\sec^2 x+co\sec^2 y=0$$

$$y' = \frac{-2\sec x \ \sec x \ tgx}{-2co\sec y \ co\sec y \ \cot g y} = \frac{\sec^2 x \ tgx}{co\sec^2 y \ \cot g y}$$